UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	LICENCE STS

Année universitaire 2008–2009

L1 parcours PC : PHYSIQUE

CONTRÔLE TERMINAL

durée 2 heures

Dans ce texte, les vecteurs sont notés en **gras**.

I Un modèle simplifié de radiation atomique : l'électron élastiquement lié

On considère le modèle suivant pour un atome de sodium : l'électron de valence de masse m_e est relié au noyau de l'atome de sodium (supposé fixe) par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos nulle. Il se trouve qu'une charge en mouvement émet un rayonnement électromagnétique. Du fait de ce rayonnement, la charge (ici l'électron) perd de l'énergie, ce qu'on modélise par une force de frottement $\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$. On suppose aussi pour simplifier que le mouvement se fait sur l'axe Ox.

I.1. On considère que toutes les quantités intervenant dans l'émission de rayonnement par un électron s'expriment en fonction des quatre quantités suivantes :

- la vitesse de propagation de l'onde rayonnée c ;
- la pulsation de l'onde rayonnée $\omega = \sqrt{k/m_e}$;
- la charge de l'électron $-e$;
- enfin la permittivité diélectrique du vide ε_0.

Donner les dimensions de ces quatre quantités en fonction de celles des unités fondamentales SI : longueur $[L]$, masse $[M]$, temps $[T]$ et intensité de courant électrique $[I]$.

Correction :

$[c] = [L][T]^{-1}$ 0,5

$[\omega] = [T]^{-1}$ 0,5

$[e] = [I][T]$ 0,5

$[\varepsilon_0] = [I]^2[T]^4[M]^{-1}[L]^{-3}$ 1

I.2. Quelle est la dimension de α en fonction des dimensions des unités fondamentales SI. En déduire que :

$$\alpha = f\frac{\omega^2 e^2}{\varepsilon_0 c^3}$$

où f est un facteur numérique sans dimension. On prendra (sans chercher à le démontrer) $f = 1/6\pi$.

Correction :

$[\alpha] = [M][T]^{-1}$ 0,5

On cherche $\alpha = f\omega^a e^b \varepsilon_0^c c^d$, et donc $[M][T]^{-1} = [L]^{d-3c}[T]^{-a-d+b+4c}[M]^{-c}[I]^{b+2c}$. Soit :

$$\begin{aligned} c &= -1 \\ d &= -3 \\ b &= 2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

I.3. Écrire la deuxième loi de Newton pour le mouvement de l'électron.
Correction :
$m_e\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$ 1

I.4. En déduire que l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

et donner les expressions de τ et ω.
Correction :
$1/\tau = \alpha/m_e$ 0,5
$\omega = \sqrt{k/m_e}$ 0,5

I.5. On peut démontrer que la lumière émise par l'atome est une onde de fréquence $\omega/2\pi$. Expérimentalement, on constate que cette fréquence est de $0{,}508\,333\,195\,8(15) \times 10^{15}$ Hz. Quelle est la valeur numérique de τ ? En déduire que $1/\tau \ll \omega$. *On donne les autres valeurs numériques nécessaires à la fin de cet exercice.*
Correction :
$\tau = m/\alpha = (3/2)(4\pi\varepsilon_0 c^3 m_e/\omega^2 e^2) = 1,564312432 \times 10^{-8}$ s 1,5
$\omega \simeq 3 \times 10^{15} \gg (1/\tau) \simeq 10^8$ 0,5

I.6. Calculer la solution générale de l'équation (1). On suppose que l'électron a été éloigné à une distance $x_0 = 10^{-10}$ m du noyau sans vitesse initiale. Représenter l'allure de la solution correspondante.
Correction :
On demande le calcul, c.-à-d. équation caractéristique, solution de cette équation pour l'amortissement faible et forme des deux solutions.
L'ensemble : 2
Allure de la solution : 1

Quelques constantes fondamentales

- Masse de l'électron $m_e = 0{,}910\,938\,188\,(72) \times 10^{-30}$ kg ;
- Vitesse de la lumière $c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8$ m.s^{-1} ;
- $e^2/4\pi\varepsilon_0 = 230{,}707\,705\,6 \times 10^{-30}$ J.m.

II. Ondes stationnaires sur une corde de guitare :

Une corde de guitare, de masse par unité de longueur $\mu = 1$ g.m^{-1} est tendue avec une tension $T = 250$ N. Sa longueur est $\ell = 60$ cm. On rappelle que la vitesse des ondes sur une telle corde est $v = \sqrt{T/\mu}$.

II.1. Écrire l'équation de propagation des ondes sur la corde (équation de D'Alembert). On notera $y(x,t)$ le déplacement de la corde par rapport à sa position d'équilibre.
Correction :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(2 pts)}$$

II.2. Quelle est l'expression générale des ondes stationnaires sur cette corde (on ne demande pas la démonstration) ?
Correction :

$$y(x,t) = a\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \varphi') \qquad \textbf{(1 pt)}$$

avec $\omega = kv$ **(1 pt)**.

II.3 La corde est fixée à chaque extrémité, ce qui fait que $y(0,t) = y(\ell,t) = 0, \forall t$. En déduire la fréquence de l'onde stationnaire de plus grande longueur d'onde possible sur cette corde. Application numérique. On souhaite accorder cette corde sur la note *la* du diapason (fréquence $f = 440$ Hz). Que faut-il faire ?
Correction :
On doit avoir $\cos\varphi' = \cos(k\ell + \varphi') = 0$, soit :

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\pi}{2} + p\pi \qquad p \text{ entier} \\ k\ell + \varphi' &= \frac{\pi}{2} + q\pi \qquad q \text{ entier} \end{aligned}$$

La plus grande longueur d'onde correspond au plus petit k possible, soit $k\ell = \pi$ ou $\ell = \lambda/2$, où λ est la longueur d'onde **(1 pt pour la démonstration complète, 0,5 pt si seulement la formule finale)**. Avec, $f = v/\lambda$, on arrive à :

$$f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2\ell} = \frac{500}{1{,}2} = 417 \text{ Hz} \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

Il faut donc augmenter la fréquence, soit augmenter T, en tendant la corde **(0,5 pt)**.

III. Exploration de Titan par la sonde Cassini–Huygens :

Le 15 octobre 1997, les agences spatiales européenne (ESA) et américaine (NASA) ont lancé la sonde Cassini–Huygens, destinée à l'observation du satellite naturel Titan de la planète Saturne. Après un voyage de 3,5 milliards de kilomètres, qui a duré 7 ans, l'*orbiter* Cassini, transportant la sonde Huygens, a été satellisé autour de Saturne. Dans la suite, tous les objets planétaires considérés seront assimilés à des points matériels.

III.1 Quelle est l'expression de la force de gravitation qu'exerce Saturne S, de masse M_S, sur Titan T, de masse M_T, en fonction de la distance ST qui les sépare ? Calculer la valeur de cette force, ainsi que le champ de gravitation G_S correspondant, en précisant leurs unités respectives.
Correction :

$$\begin{aligned} F_{ST} &= G\frac{M_S M_T}{ST^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{105{,}65 \times 0{,}0225 M_{\text{Terre}}^2}{(1{,}222 \times 10^9)^2} = 3,82 \times 10^{21} \text{ N} \qquad \textbf{(1 pt)} \\ G_S &= \frac{F_{ST}}{0{,}0225 M_{\text{Terre}}} = 2{,}83 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

III.2 On admet que T a un mouvement circulaire uniforme autour de S, par rapport au référentiel galiléen R_S, d'origine le centre S de Saturne et d'axes définis par des étoiles éloignées.

a) Appliquer la deuxième loi de Newton à T dans R_S.
Correction :
La seule force est celle de gravitation, qui est centripète, et l'on a donc :

$$G_S = a = \frac{v^2}{ST}$$ **(1+1 pts).** a **en fonction de** v **peut être fait dans la question suivante**

où a est l'accélération de Titan.

b) En déduire l'expression de la vitesse de satellisation (c.-à-d. ici la vitesse de Titan sur son orbite), en fonction de M_S et ST. Application numérique.
Correction :

$$v = \sqrt{STG_S} = \sqrt{\frac{GM_S}{ST}} = 5{,}88 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$ **(1 pt+0,5 pour l'AN)**

c) Trouver la période de révolution de Titan autour de Saturne. Comparer cette période à celle d'un jour terrestre.
Correction :
la période $T_{\text{rév}}$ est p/v où p est le périmètre du cercle :

$$\begin{aligned} T_{\text{rév}} &= \frac{2\pi ST}{v} = \qquad \textbf{(1 pt)} \\ &= \frac{6{,}28 \times 1{,}222 \times 10^9}{5{,}88 \times 10^3} = \\ &= 1{,}30 \times 10^6 \text{ s} \simeq 15 \text{ jours terrestres} \qquad \textbf{(0,5 pt+0,5pt)} \end{aligned}$$

III.3.a) Quel est le champ de gravitation G_T produit par Titan sur sa surface, c.-à-d. à la distance R_T de T ? Comparer sa valeur à celle du champ de pesanteur terrestre.
Correction :

$$G_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{0{,}0225 M_{\text{Terre}}}{(2{,}575 \times 10^6)^2} = 1{,}35 \text{ m.s}^{-2}$$ **(1 pt)**

C'est environ le septième du champ terrestre **0,5 pt**.

b) Le 14 janvier 2005, la sonde Huygens, de masse $M_H = 350$ kg, s'est détachée de l'orbiter Cassini et a plongé vers Titan, avec une vitesse de 6 km.s^{-1}, à partir d'une altitude de 300 km. Freinée d'abord par l'atmosphère de Titan, puis par un parachute, sa vitesse a été réduite jusqu'à 6 m.s^{-1} lors du contact avec le sol de Titan. Calculer la variation d'énergie cinétique, entre l'altitude de 300 km et la surface.
Correction :

$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{M_H}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 175(36 - 36 \times 10^6) = -6{,}30 \times 10^9 \text{ J}$$ **(1 pt)**

c) Sachant que l'on peut admettre que le champ G_T est uniforme et qu'il a la valeur calculée en II.3.a), calculer la variation de l'énergie potentielle de gravitation sur le même parcours.
Correction :

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = M_H G_T(z_2 - z_1) = 350 \times 1{,}35(0 - 3 \times 10^5) = -1{,}42 \times 10^8 \text{ J}$$ **(1 pt)**

d) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, calculer le travail des forces de frottement qui ont freiné la sonde.
Correction :

$$\Delta E_m = E_{m_2} - E_{m_1} = W_{\text{frottement}} = \Delta E_k + \Delta E_p = -6{,}44 \times 10^9 \text{ J}$$ **(1 pt théorème + 1 pt application)**